Soluție

1. a) $A^2 = 5A \Rightarrow \begin{pmatrix} 1+2x & 10 \\ 5x & 2x+16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 5x & 20 \end{pmatrix} \Rightarrow x = 2.$

b) Pentru $x = 2$, conform punctului anterior, rezultă $A^2 = 5A.$ Prin inducție, rezultă $A^n = 5^{n-1}A,$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*,$ de unde $A^{2009} = 5^{2008}A.$

c) $A + A^t = \begin{pmatrix} 2 & x+2 \\ x+2 & 8 \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{rang}\left(A + A^t\right) = 1$ dacă şi numai dacă $\det\left(A + A^t\right) = 0,$ adică $x \in \{-6, 2\}.$

2.a) $f(-1) = a^2 - 2a + 7 = 10 \Rightarrow a \in \{-1, 3\}.$

b) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2 - 2\sum\limits_{1 \le i < j \le 4} x_i x_j$. Cum $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 - a$ şi $\sum\limits_{1 \le i < j \le 4} x_i x_j = \dfrac{a^2 + 3}{2}$,

rezultă $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = -2a - 2$

c) Avem $\sum\limits_{1 \le i < j \le 4} \left(x_i - x_j\right)^2 = 3\sum\limits_{1 \le i < j \le 4} x_i^{\ 2} - 2\sum\limits_{1 \le i < j \le 4} x_i x_j = -a^2 - 6a - 9$. Dacă f are toate rădăcinile reale

$\Rightarrow \sum\limits_{1 \le i < j \le 4} \left(x_i - x_j\right)^2 \ge 0 \Rightarrow -a^2 - 6a - 9 \ge 0 \Rightarrow a = -3$.

Egalitatea are loc dacă $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = \dfrac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4} = \dfrac{1-a}{4} = 1$. Obținem $a = -3,\ b = -8,\ c = 2$.